

四、倍乘电压表法

只要被测信号的峰值因数在仪表的限度范围内,一般都可采用倍乘电压表法测量。对于低功率因素的非正弦量,采用这种方法也能得到较准确的测量结果。其测量原理示于图 6-17 中。无感电阻与磁芯上的线圈串联,将电阻两端的电压和线圈两端的电压分别接

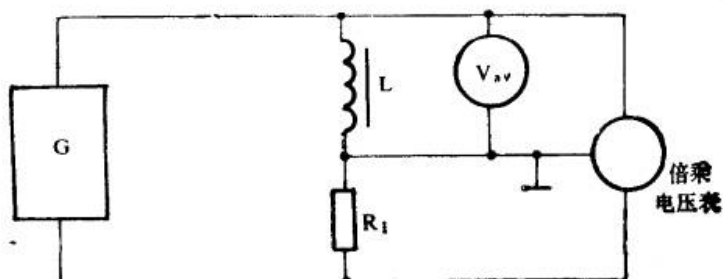


图 6-17 测量磁芯总损耗的倍乘电压表法

到倍乘电压表的两个通道,该电表指示出两个电压瞬时值乘积的平均值。这个值正比于磁芯的总损耗,由下式给出:

$$P = (\overline{u \cdot i}) = \alpha \cdot K \quad (6-25)$$

式中, $(\overline{u \cdot i})$ 为测量线圈两端的电压和通过它的电流的乘积的时间平均值, α 为电压表的读数, K 为电表常数。

倍乘电压表,也就是从 50 年代开始研究的电子瓦特表。在 70 年代有了很大的突破。图 6-18 是用一块集成电路平方乘法器和平均电路制成的电子瓦特表的原理方框图。

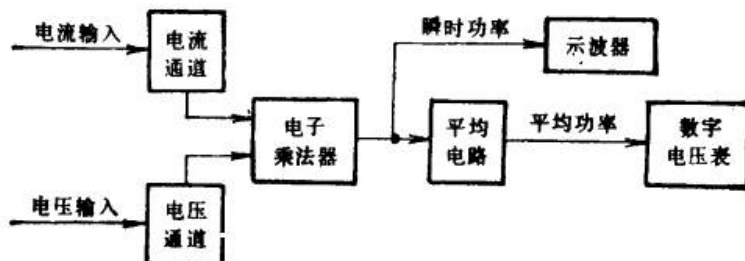


图 6-18 电子瓦特表原理

这种仪器的工作频率为 50Hz ~ 1MHz, 或 50Hz — 100kHz, 功率因数低到 0.01 和频率高到 50kHz 时,其典型测量精度是 1~5%。

6.3 高频弱场下磁芯线圈的等效电路

一、串联磁导率和并联磁导率

软磁材料大都用于制作电路中电感元件或变压器的磁心,其复数磁导率由电路参数来确定。磁心线圈在交流电路里可以等效成一个电感与电阻的并联,也可以等效成一个电感与电阻的串联。这两种等效法虽说是任意的,并且都可用来计算复数磁导率,但是,

由串联电路计算的串联复数磁导率 μ_s 并不等于由并联电路计算的并联复数磁导率 μ_p 。在下面的讨论中我们将导出它们之间的关系。

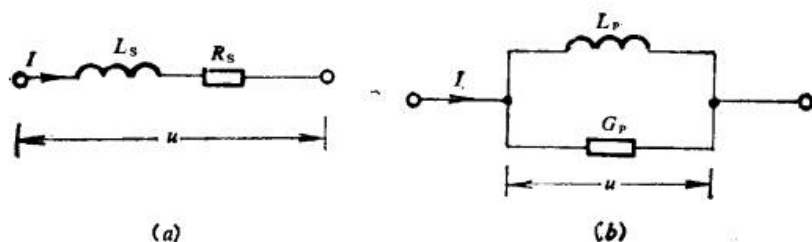


图 6-19 磁心线圈的等效电路

图 6-19 中的两种等效电路的有功功率 P 应该相等。

串联电路的阻抗 Z 为：

$$Z = R_s + j\omega L_s = R_s + jX$$

有功功率为：

$$P = I^2 R_s = I^2 \omega L_s \tan \delta \quad (6-26)$$

并联电路的导纳 Y 为：

$$Y = G_p + jB = G_p + j \frac{1}{\omega L_p}$$

有功功率为：

$$P = u^2 G_p = \left(\frac{I}{Y} \right)^2 G_p = \frac{I^2 G_p}{(G_p^2 + B^2)} = \frac{I^2 \omega L_p \tan \delta}{1 + \tan^2 \delta} \quad (6-27)$$

式(6-26)和(6-27)应该相等,所以:

$$\begin{aligned} I^2 \omega L_s \tan \delta &= I^2 \omega L_p \tan \delta / (1 + \tan^2 \delta) \\ L_s &= L_p / (1 + \tan^2 \delta) \end{aligned} \quad (6-28)$$

由于磁心的磁导率 μ 正比于磁心线圈的电感 L , 所以由式(6-28)可以得到:

$$\mu_s = \mu_p / (1 + \tan^2 \delta) \quad (6-29)$$

由此可见, μ_s 并不等于 μ_p 。而两者之中, 究竟哪一个作为磁性材料的特性参数才算合适呢? 这里要区别两种情况: 对于由一般的磁性材料制作的磁心线圈, 分布电容往往可以忽略, 而等效电阻又比等效电抗小得多, 所以, 串联电路的模式更符合于客观情况; 而对于在高频下使用的某些特殊的磁心和变压器, 分布电容已不能忽略, 这时采用并联电路的模式更符合实际情况。所以, 我们一般所说的磁导率都是指串联磁导率, 只有在特殊情况下才使用并联磁导率。从式(6-29)也可看出, 当磁心的损耗很小时, 即 $\tan \delta \ll 1$ 时, $\mu_s \approx \mu_p$ 。在一般情况下我们用串联磁导率来表征磁特征是合理的。至于特殊情况下的并联磁导率的计算和测试问题, 在此不作讨论。

二、磁心线圈的串联等效阻抗与 μ' 、 μ'' 的关系

一个环形磁心线圈实际上是一个有损耗的电抗元件, 其有功功率不为零。因此可以把它等效为一个纯电感 L_x 和一个损耗电阻 R_x 的串联电路。在图 6-20(a) 中, A、B 两点间的复阻抗为:

$$Z_{x_1} = \frac{\dot{U}}{i} \quad (6-30)$$

式中, \dot{U} 为加在 A、B 两点间的电压, i 为绕组中的电流。在图 6-20(b) 中 A、B 两点间的复阻抗为:

$$Z_{x_2} = R_x + j\omega L_x \quad (6-31)$$

如果忽略绕组的铜阻, 则 \dot{U} 为绕组中的感生电动势所平衡。

$$\dot{U} = N A_e \cdot \frac{d\dot{B}}{dt} \quad (6-32)$$

环形线圈内的磁场为:

$$\dot{H} = \frac{N}{l_e} i \quad (6-33)$$

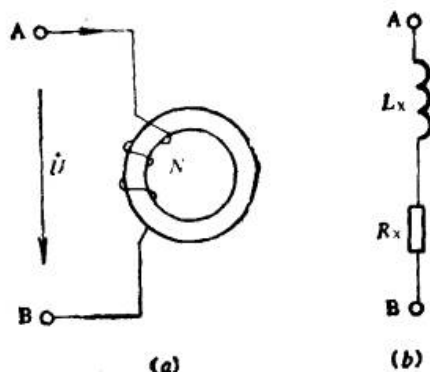


图 6-20 磁心线圈的串联等效电路

将式(6-32)、(6-33)代入式(6-30)可得:

$$\begin{aligned} Z_{x_1} &= \frac{N^2 A_e}{l_e} \cdot \frac{d\dot{B}/dt}{\dot{H}} = j\omega \frac{N^2 A_e}{l_e} \cdot \frac{\dot{B}}{\dot{H}} = j\omega \frac{N^2 A_e}{l_e} \mu_0 \dot{\mu} \\ &= j\omega \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} (\mu' - j\mu'') \\ &= \omega \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \mu'' + j\omega \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \mu' \end{aligned} \quad (6-34)$$

式中, h 为环形磁心的高度; r_2 和 r_1 分别为环形磁心的外半径和内半径; A_e 为试样的有效截面积; N 为线圈的匝数。式(6-34)的实部和虚部应分别与式(6-31)的实部和虚部相等, 则有:

$$R_x = \frac{\omega \mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \mu''$$

$$L_x = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \mu'$$

所以, μ' 和 μ'' 分别为:

$$\mu' = \frac{2\pi L_x}{\mu_0 N^2 h \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (6-35)$$

$$\mu'' = \frac{2\pi R_x}{\omega \mu_0 N^2 h \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (6-36)$$

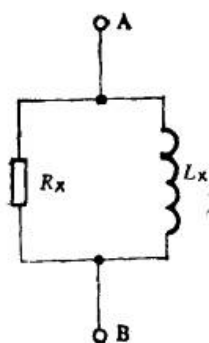


图 6-21 磁心线圈的并联等效电路

三、磁心并联等效阻抗与 μ' 、 μ'' 的关系

根据惯例, μ' 和 μ'' 应是串联等效阻抗所对应的磁导率, 而不是并联磁导率。本节所讨论的是两种等效电路中等效参数的关系。

磁心线圈可以等效成一个电阻和一个电感的并联, 图 6-21 中 A、B 两点的阻抗为:

$$Z_{ab} = \frac{R_x \cdot j\omega L_x}{R_x + j\omega L_x} = \frac{\omega^2 L_x^2 R_x + j\omega L_x R_x^2}{R_x^2 + \omega^2 L_x^2} \quad (6-37)$$

若将并联阻抗转换为串联阻抗,则式(6-37)应等于式(6-34),所以有:

$$\frac{\omega \mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \mu'' = \frac{\omega^2 L_x^2 R_x}{R_x^2 + \omega^2 L_x^2}$$

$$\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \mu' = \frac{\omega L_x R_x^2}{R_x^2 + \omega^2 L_x^2}$$

由以上两式得到:

$$\mu' = \frac{2\pi\omega L_x R_x^2}{\mu_0 N^2 h \ln \frac{r_2}{r_1} (R_x^2 + \omega^2 L_x^2)} \quad (6-38)$$

$$\mu'' = \frac{2\pi\omega^2 L_x^2 R_x}{\mu_0 N^2 h \ln \frac{r_2}{r_1} (R_x^2 + \omega^2 L_x^2)} \quad (6-39)$$

这里 L_x 和 R_x 相当于图 6-19 中的并联参数。

四、磁心线圈的等效导纳与 μ' 、 μ'' 的关系

这里的 μ' 和 μ'' 仍然是串联复数磁导率的实部和虚部。我们还可以将磁心线圈等效成一个电导和一个电纳的并联电路,如图 6-22 所示。这种等效电路中,将感抗等效成容抗,似乎改变了电路的性质,毫无可取之处。但是这种等效电路仍然有实用价值,例如在导纳电桥中就要使用这种等效。处理这种电路的原则仍然是将它与串联阻抗比较,求出电路参数的关系。

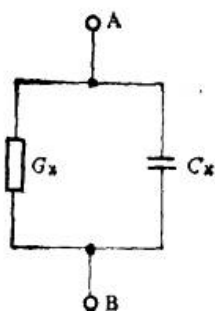


图 6-22 磁心线圈等效为电导和电纳的并联

在图 6-22 中, A、B 两点的阻抗为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Y_{ab}} &= \frac{1}{G_x + j\omega C_x} = \frac{G_x - j\omega C_x}{G_x^2 + \omega^2 C_x^2} \\ &= \frac{G_x}{G_x^2 + \omega^2 C_x^2} - j\omega \frac{C_x}{G_x^2 + \omega^2 C_x^2} \end{aligned} \quad (6-40)$$

比较图 6-22 与图 6-20 (b) 的等效电路则

$$Z_{ab} = \frac{1}{Y_{ab}}$$

所以

$$R_x + j\omega L_x = \frac{G_x}{G_x^2 + \omega^2 C_x^2} - j\omega \frac{C_x}{G_x^2 + \omega^2 C_x^2}$$

上式两边的实数和虚数分别相等:

$$\text{则} \quad R_x = \frac{G_x}{G_x^2 + \omega^2 C_x^2} \quad (6-41)$$

$$L_x = \frac{(-C_x)}{G_x^2 + \omega^2 C_x^2} \quad (6-42)$$

将以上两式代入式(6-35)和(6-36),得到:

$$\mu' = \frac{2\pi}{\mu_0 N^2 h \ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{(-C_x)}{G_x^2 + \omega^2 C_x^2} \quad (6-43)$$

$$\mu'' = \frac{2\pi}{\omega \mu_0 N^2 h \ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{G_x}{G_x^2 + \omega^2 C_x^2} \quad (6-44)$$

而 $\lg \delta = \frac{\mu''}{\mu'} = \frac{-G_x}{\omega C_x} \quad (6-45)$

$$Q = \frac{-\omega C_x}{G_x} \quad (6-46)$$

式(6-42)中的负号意味着电导和电纳并联等效电路中的负电容相当于电阻和电感串联等效电路中的电感。所以,应用图 6-22 所示的电路就得出了一个非常不合实际的结论: $\lg \delta$ 为负值。

五、磁心线圈的分布电容

电感线圈的绕组存在分布电容。这种分布电容与绝缘材料的性质、线圈骨架的构造、绕组的形式有关,会使测量结果产生误差。在高频下进行测量,这种误差更为严重,因此必须设法消除。考虑分布电容对测量结果的影响,首先要把所有的分布电容折算到线圈的引出端,图 6-23(a) 中,是将相邻线匝之间、不相邻线匝之间、引线之间、匝与地之间的分布电容的总效应等效成一个与被测电感并联的集中电容 C_0 。

设包括分布电容在内的电路参数为 L_{cx} 和 R_{cx} , 而不包括分布电容的电路参数为 L_x 和 R_x 。对于图 6-23(a) 的情况,等效阻抗为:

$$Z_s = \frac{(R_x + j\omega L_x) \left(\frac{1}{j\omega C_0} \right)}{(R_x + j\omega L_x) + \left(\frac{1}{j\omega C_0} \right)} = \frac{R_x + j\omega L_x}{1 - \omega^2 L_x C_0 + j\omega R_x C_0}$$

对于图 6-23(b) 的情况,等效阻抗为:

$$Z_b = R_{cx} + j\omega L_{cx}$$

将 Z_s 的表达式化简并使 $Z_s = Z_b$, 可以得到:

$$\begin{aligned} L_{cx} &= \frac{(1 - \omega^2 L_x C_0) L_x - R_x^2 C_0}{(1 - \omega^2 L_x C_0)^2 + \omega^2 R_x^2 C_0} \\ &= \frac{L_x - C_0 (R_x^2 + \omega^2 L_x^2)}{\omega^2 R_x^2 C_0 + (1 - \omega^2 L_x C_0)^2} \quad (6-47) \end{aligned}$$

$$R_{cx} = \frac{R_x}{\omega^2 R_x^2 C_0 + (1 - \omega^2 L_x C_0)^2} \quad (6-48)$$

由于 $R_x^2 \ll \omega^2 L_x^2$, R_x^2 可以略去, 二级小量 $\omega^2 R_x^2 C_0$ 也可略去, 式(6-47)和(6-48)可简化成:

$$L_{cx} = \frac{L_x}{1 - \omega^2 L_x C_0} \quad (6-49)$$

$$R_{cx} = \frac{R_x}{(1 - \omega^2 L_x C_0)^2} \quad (6-50)$$

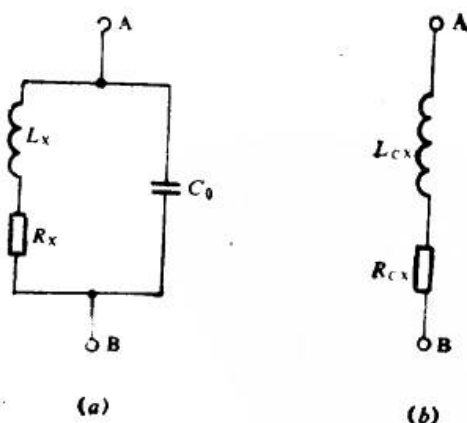


图 6-23 分布电容的等效电路

由于 C_0 的影响, Q_{cx} 也不同于 Q_x ,

$$Q_{cx} = \frac{\omega L_{cx}}{R_{cx}} = Q_x(1 - \omega^2 L_x C_0) \quad (6-51)$$

式(6-49)、(6-50)和(6-51)中的 L_{cx} 、 R_{cx} 、 Q_{cx} 就是我们使用各种测量仪器所得到的视在测量值,而 L_x 、 R_x 和 Q_x 才是我们所需要的真实值。当测量频率很低、分布电容很小时,视在值和真实值相等。反之, L_{cx} 和 R_{cx} 将分别大于 L_x 和 R_x 而 Q_{cx} 将小于 Q_x 。

6.4 交流电桥

一、交流四臂电桥原理

交流电桥种类繁多,但大多数可以归结为如图 6-24 所示的四臂阻抗电桥。电桥的四个臂可以是电阻、电感或电容,也可以是这些元件的串联、并联组合。被测对象为电桥的一臂。在电桥的一条对角线 ab 上接入交流测试电源,另一对角线 cd 上接入指零仪表。

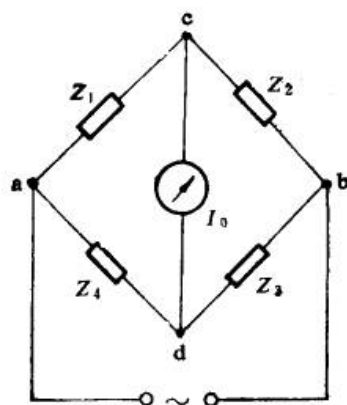


图 6-24 交流电桥的基本电路

调节电桥的桥臂参数,使指零仪中无电流 ($I_0 = 0$) 通过,这时 c 、 d 两点的电位相等,电桥达到平衡,有 $U_{ac} = U_{ad}$; $U_{cb} = U_{db}$, 即:

$$I_1 Z_1 = I_4 Z_4; I_2 Z_2 = I_3 Z_3$$

两式相除得:

$$\frac{I_1 Z_1}{I_2 Z_2} = \frac{I_4 Z_4}{I_3 Z_3}$$

当电桥平衡时, $I_0 = 0$, 相当于 c 、 d 两端开路, 由此可得: $I_1 = I_2$; $I_3 = I_4$ 。所以电桥平衡时, 必须满足

$$Z_1 \cdot Z_3 = Z_2 \cdot Z_4 \quad (6-52)$$

将各复数阻抗用指数形式表示:

$$\dot{Z}_1 = Z_1 e^{j\varphi_1}; \dot{Z}_2 = Z_2 e^{j\varphi_2};$$

$$\dot{Z}_3 = Z_3 e^{j\varphi_3}; \dot{Z}_4 = Z_4 e^{j\varphi_4}$$

式中, Z_1 、 Z_2 、 Z_3 、 Z_4 是各阻抗的量值, φ_1 、 φ_2 、 φ_3 、 φ_4 是各支路电流与电压的相角差, 将它们代入式(6-52)得:

$$Z_1 Z_3 e^{j(\varphi_1 + \varphi_3)} = Z_2 Z_4 e^{j(\varphi_2 + \varphi_4)}$$

若要此式成立, 下面二等式必须同时成立:

$$Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4 \quad (6-53)$$

$$\varphi_1 + \varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_4 \quad (6-54)$$

由此可见, 任意使用不同性质的四个阻抗构成的电桥, 不一定能够使电桥达到平衡。必须依据式(6-54)的关系, 把不同的阻抗作适当的搭配。在平衡过程中, 还必须同时调整阻抗数值和阻抗角。

在很多交流电桥中, 为了调节方便, 时常在两个支路中使用纯电阻。如果把纯电阻作为相邻的两支路(如 Z_3 和 Z_4 , 即 $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$), 那么其它两个支路必须都是感性阻抗

或都是容性阻抗,这种电桥称之为电阻比率电桥。由于标准电感元件不易制造,故电阻比率电桥多用于电容的测量。如果电桥中相对的两支路是纯电阻,则另外两个相对支路中必须一个为感性阻抗,一个为容性阻抗,这种电桥称为电阻乘积电桥,它是测磁电桥的主要形式。

以上分析说明:要使交流电桥达到平衡,电桥中至少应有两个可供调节的元件。在调节过程中,通常先调节一个元件,使指零仪的指示减小,再调节另一个元件使指示更小,通过这样反复调节,电桥才有可能达到平衡。如果两个供调节平衡用的元件选择不当,可能使两种调节相互影响,以至难以平衡,而且也使测量结果不易准确。

二、测磁交流电桥的典型线路

如前所述,交流电桥可由不同阻抗的组合构成。这样,可能组合的电桥线路种类就会很多。下面介绍几种常用的电桥线路,给出平衡条件,并说明其特点和最适宜的用途。

(一) 麦克斯威尔-维恩 (Maxwell-Wien) 电桥

麦克斯威尔-维恩电桥线路如图 6-25 所示。它是一种两对边为纯电阻的电阻乘积电桥,其特点是:将电感与电容相比较,因此标准臂和未知臂必须置于相对的两边。由于以电容器作为标准元件远比电感优越,故此线路的主要用途是借已知电容来测量未知电感,并使线路中不至有两只线圈,因而使磁感耦合的可能性大为减少。作为一个例子,我们来推导它的平衡方程式。

由桥臂设置可知:

$$Z_1 = R_1; Z_2 = \frac{R_2}{1 + j\omega C_2 R_2};$$

$$Z_3 = R_3; Z_4 = R_x + j\omega L_x$$

$$R_1 \cdot R_3 + j\omega C_2 R_2 \cdot R_1 \cdot R_3 = R_2 R_x + j\omega L_x R_2$$

若要以上方程式成立,则方程两边的实数和虚数应分别相等。由此可以得出这种电桥的平衡方程式:

$$R_x = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}$$

$$L_x = R_1 \cdot R_3 \cdot C_2$$

$$Q_x = \frac{\omega L_x}{R_x} = \omega C_2 R_2$$

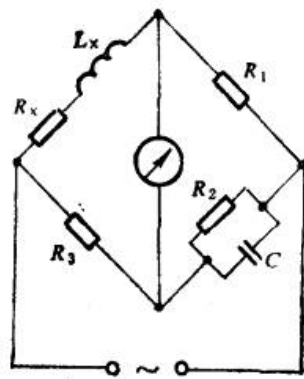


图 6-25 麦克斯威尔电桥
(图中 C 为 C_2)

从平衡方程可知,若 R_1 和 R_3 固定, R_2 和 C_2 可调,则调节 R_2 和 C_2 就可使电桥平衡,并且互不影响。两个可调量相互独立,容则达到平衡。这种电桥可称作 L - R 电桥,具有直接以电感量刻度的特点。由于电桥的平衡与频率无关,因此电源频率的变化和谐波所产生的影响也就降低到最低限度了。如果采用固定的标准电容,电感的平衡可借助臂 R_1 或 R_3 和 R_2 来平衡,这样可实现 L_x 和 Q_x 的分别读数,因此这种电桥又称为 L - Q 电桥,其电阻臂 (R_1 或 R_3) 的度盘可直接按未知电感刻度,在固定频率下, R_2 的度盘可按 Q 值刻度。 L - R 型麦克斯威尔电桥具有良好的收敛性,几次反复调节 R_2 和 C_2 之后就能使电桥平衡,适用于测量低 Q 电感。 L - Q 电桥的收敛性与 Q_x 有关。当测试样品的

Q 值很小时, 电桥难以平衡。所以, 它适于测量 Q 值较高的样品。但是 Q 值太高, R_2 需要很大的数值, 有时不易办到。

(二) 海氏电桥

海氏电桥也属于电阻乘积电桥。使用这种电桥时, 要将被测磁心线圈等效成电感和电阻的并联。其线路如图 6-26 所示。

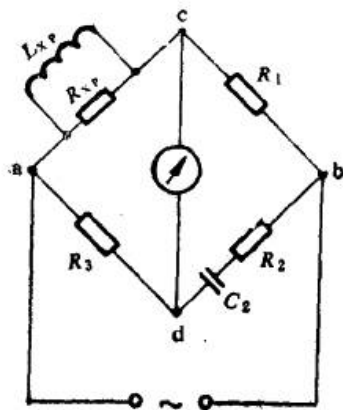


图 6-26 海氏电桥

若以 L_{xp} 和 R_{xp} 表示并联有效电感和电阻, 则海氏电桥的平衡方程为:

$$\begin{aligned} L_{xp} &= R_1 R_3 C_2 \\ R_{xp} &= \frac{R_1 R_3}{R_2} \\ Q_x &= \frac{\omega L_x}{R_x} = \frac{1}{\omega C_2 R_1} \end{aligned} \quad (6-56)$$

这里, Q_x 是按串联等效电路来定义的。

(三) 欧文电桥

欧文电桥可以看作是以上两种电阻乘积电桥的变体, 其线路见图 6-27。它的平衡方程为:

$$\begin{aligned} L_x &= R_1 \cdot R_3 \cdot C_2 \\ R_x &= R_1 \frac{C_2}{C_3} \\ Q_x &= \omega C_3 R_3 \end{aligned} \quad (6-57)$$

从图中看出, 损耗电阻 R_x 是由串联在 R_3 上的一个电容来平衡的。 L_x 和 R_x 也可分别平衡。其缺点是需要一个连续可变的电容器 C_3 ; 当 Q_x 较高时, 所需 C_3 的数值较大, 必须以十进电容箱充任。

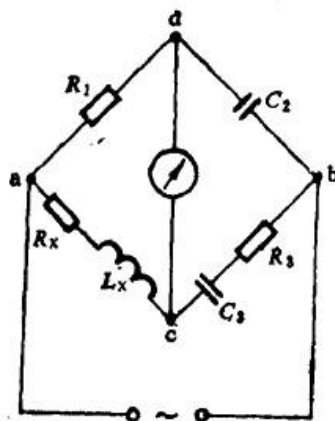


图 6-27 欧文电桥

(四) 变压器电桥

变压器电桥又称为导纳电桥。它是利用一只变压器作为比例臂的电桥, 线路如图 6-28 所示。

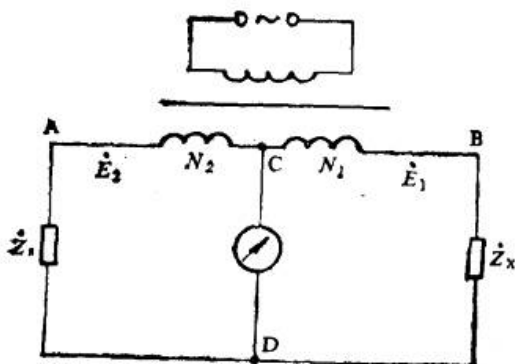


图 6-28 变压器电桥

当电桥达到平衡, 即没有电流流过指零仪时, 流过绕组 N_1 、 N_2 及阻抗 Z_x 、 Z_1 中的就是同一电流 I 。若变压器是理想的, 即没有漏抗压降, 也没有内阻压降, 则绕组 N_1 上的感应电动势为 Z_x 上的压降所平衡, 而绕组 N_2 上的感应电动势必为 Z_1 上的压降所平衡, 故有

$$\dot{E}_1 = I \cdot Z_x; \quad \dot{E}_2 = I \cdot Z_1$$

由此得:

$$\begin{aligned} \frac{Z_x}{Z_1} &= \frac{\dot{E}_1}{\dot{E}_2} = \frac{N_1}{N_2} \\ \text{所以} \quad Z_x &= \frac{N_1}{N_2} \cdot Z_1 \end{aligned} \quad (6-58)$$

变换比例臂 $\frac{N_1}{N_2}$ 或调节标准阻抗 Z_0 , 使电桥达到平衡后, 就可按式(6-58)求得被测

阻抗 Z_x 。

变压器电桥也是一种对称电桥, 桥臂比是 1:1, 因此准确度比较高, 同时可接成对地对称形式, 因此非常有利于高频测量。由于电桥平衡时变压器铁心中无磁通, 因此这种电桥具有较高的灵敏度。

用这种电桥测量感性导纳时, 常常接成图 6-29 的电路形式, 读数电容器 C_s 与被测磁心线圈并联, 这时被测磁心线圈等效成电导 G_x 与电容 C_x 的并联电路。 C_0 和 G_0 是为平衡电桥的残余电导和电容而设置的, 调整 C_0 和 G_0 可使电桥预平衡。调节 G_s 和 C_s 可以平衡被测导纳。由式(6-58)可以得到:

$$Y_x = KY_s \quad (K = N_2/N_1),$$

$$KG_s = G_x + j\omega C_x + j\omega C_s = G_x + j\omega(C_x + C_s)$$

所以

$$G_x = KG_s$$

$$C_x = -C_s \quad (6-59)$$

将此式代入式(6-43)和(6-44)即可求出 μ' 和 μ'' 。

从原理来看, 导纳电桥并不是一种好的测磁电桥。在一般情况下, 由于被测电感 L_x 与电容组成了并联谐振回路, 在式(6-42)中, 当 $\left(\frac{\omega C_x}{G_x}\right)^2 \gg 1$ 时, $|L_x| = 1/\omega^2 C_x$, 具有与谐振公式相似的形式, 所以随着测量频率的上升, L_x 的测量范围迅速减小, 反之亦然。电容 C_s 的可变范围和频率范围限制了电感的测量范围, 当测试频率变化时, 在量程范围内并不是任意大小的电感都可以测量的。

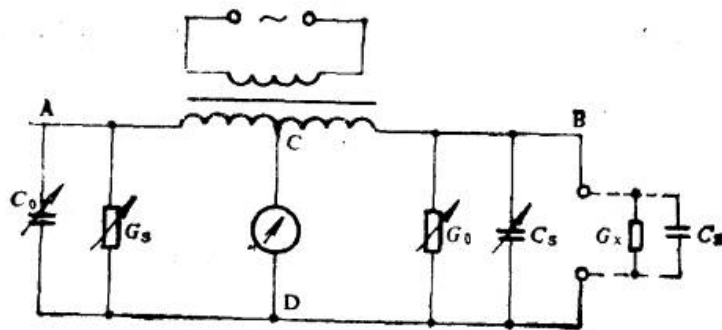


图 6-29 测电感的导纳电桥

6.5 复数磁导率的电桥测量法

电桥法已广泛地用于弱磁场范围内测定磁特性。如前所述, 在弱场范围内, 磁性材料主要的磁特性是复数磁导率。在某些磁场强度、频率和温度下, 以测定 μ' 、 μ'' 为基础, 也可以取得磁性材料的其它一些重要参数, 如损耗系数、温度系数和振幅不稳定性等等。

测量时, 样品做成环形, 截面可以是任意形状, 径向宽度需遵守第一章所述规定。

在样品上均匀地绕上匝数为 N 的线圈(匝数 N 应保证样品均匀磁化)。这个磁心线圈

可等效为一个电感与损耗电阻的串联,或者等效为一个电纳与电导的并联。将这个线圈接入交流电桥的测试端,根据电桥给出的结果,由式(6-35)、(6-36)、(6-43)、(6-44)可算出 μ' 、 μ'' 的数值。有些电桥可直接读出磁心线圈的 Q 值。

一、分布参数对测量的影响

当测试频率很低时,可以大致认为磁心线圈的损耗只是由绕组中的损耗和磁心中的损耗(磁滞、涡流、磁后效)所形成的。因此,损耗电阻具有下列形式:

$$R_x = R_0 + R_M$$

式中, R_0 为线圈铜阻; $R_M = R_i + R_h + R_s$ 为磁损耗电阻,其中 R_i 为涡流损耗的等效电阻, R_h 为磁滞损耗的等效电阻, R_s 为剩余损耗的等效电阻。

当测试频率较高时,许多因素(例如绕组中的趋肤效应、磁心绕组的固有电容以及绕组绝缘物的介质损耗等)都开始强烈地表现出来,因而使得磁心线圈的等效参数发生很大的变化。这时等效电感

$$L_{cx} = L_x + L_{c0}$$

式中, L_{c0} 为固有电容所引起的附加电感。

等效电阻 $R_{cx} = R_0 + R_M + R_{c0} + R_q + R_s$

式中, R_{c0} 为固有电容所引起的附加损耗电阻; R_s 是介质损耗所引起的附加损耗电阻; R_q 是由趋肤效应所引起的线圈的交流电阻; R_{c0} 、 R_s 和 R_q 三者之中, R_q 对测量值的影响最大,随着测试频率的增高,它的增加量甚至比磁心损耗电阻 R_M 的增加量还要大。所以,在较高频率(160kHz 以上)下测量磁心线圈的磁特性时,必须用多股相互绝缘的导线绕制测量线圈,借以消除趋肤效应的影响,从而达到降低 R_q 的目的。在 10MHz 频率下测量时,确定导线粗细的经验是:各股导线以“微米”计算的直径必须小于以“米”计的波长,这时线圈的交流电阻可以忽略不计。若要考虑 R_q 的影响,它的数值可按下列式计算:

$$R_q = 57 \frac{L \cdot V_s}{\mu V_s} f^2 d^2 (\Omega) \quad (6-60)$$

式中, L ——线圈的电感(H); d ——心线直径(mm); μ ——磁心磁导率; V_s ——铜线体积(mm^3); V_s ——磁心体积(mm^3); f ——测试频率(Hz)。

下面讨论固有电容对测量的影响和消除误差的办法。

首先假定磁心的磁导率 μ' 不依赖于频率。在图 6-23(a) 所示的等效电路中,槽路的振荡频率 ω_L 被定义为磁心线圈的固有振荡频率,其值由下式确定:

$$\omega_L = \frac{1}{\sqrt{L_x C_0}} \quad (6-61)$$

由式(6-49)和(6-50)表明,当测试频率 $\omega < \omega_L$ 时, $L_{cx} > L_x$, $R_{cx} > R_x$, $Q_{cx} < Q_x$, 测试频率越接近 ω_L , 这三个不等式就越加强,测量的误差也就越大。只有在固有振荡频率 ω_L 大大超过测试频率时,固有电容的影响才可忽略不计。一般要求 $\omega < \frac{1}{3} \omega_L$ 。当测试频率 $\omega > \omega_L$ 时, L_{cx} 为一负值,这时磁心线圈与其固有电容的等效效应为一容性阻抗,这一阻抗在一般情况下是很难测出的。所以,磁心线圈的固有振荡频率限制了测量

的上限频率,它给高频测量带来了很大的局限性。

在式(6-49)、(6-50)中,若令 $\omega^2 L_x C_0 = m^2$, 那么,在真实值 L_x, R_x, Q_x 与测量视在值 L_{cx}, R_{cx}, Q_{cx} 的关系式中,就可引入测量频率 ω 与固有振荡频率 ω_L 之比 ω/ω_L 的概念。

因为

$$\omega^2 L_x C_0 = m^2$$

$$\frac{\omega}{m} = \frac{1}{\sqrt{L_x C_0}} = \omega_L$$

所以,将 $(\omega/\omega_L) = m$ 代入式(6-49)、(6-50)中可得:

$$L_x = \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_L} \right)^2 \right] \cdot L_{cx}$$

$$R_x = \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_L} \right)^2 \right] \cdot R_{cx}$$

$$Q_x = \frac{Q_{cx}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_L} \right)^2} \quad (6-62)$$

式(6-62)就是考虑了固有电容的影响后真实值与测量视在值之间的关系式。这样,对测量视在值 L_{cx}, R_{cx}, Q_{cx} 的修正就归结为对 ω_L 的测量。在电桥法测量中,磁心线圈的固有振荡频率可用如下方法确定:

利用电桥在两个频率下对磁心线圈进行测量。一是在低频下测量,这时固有电容的效应完全可以忽略;另外,在高频(小于 ω_L)下测量,这时固有电容起了不大的分路作用。又因我们的前提是磁心线圈的真实电感 L_x 不随频率而变(测试电压保持恒定),则

对于低频

$$L_{cl} = L_x$$

对于高频

$$L_{ch} = \frac{L_x}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_L} \right)^2}$$

在以上两式中, L_{cl}, L_{ch} 为所测定的已知量,则可求得

$$\left(\frac{\omega}{\omega_L} \right)^2 = \frac{L_{ch} - L_{cl}}{L_{ch}}$$

将 $\left(\frac{\omega}{\omega_L} \right)^2$ 代入式(6-62)便可对电桥所测定的磁心线圈视在参数进行修正。

若要确定磁心线圈的固有电容 C_0 ,也可在低于 ω_L 的两个频率下对磁心线圈进行测量。若在频率 ω_1 下测得的电感视在值为 L_{cx1} ,在频率 $\omega_2 (\omega_2 > \omega_1)$ 下测得 L_{cx1} ,则由式(6-49)可导出:

$$C_0 = \frac{L_{cx2} - L_{cx1}}{L_{cx1} \cdot L_{cx2} (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \quad (6-63)$$

一般情况下, $f_1 \left(= \frac{\omega_1}{2\pi} \right)$ 可取 1kHz 左右, $f_2 \left(= \frac{\omega_2}{2\pi} \right)$ 取 10kHz 左右。将 C_0 值代入式(6-49)可对视在参数进行修正。

如果磁心的磁导率 μ' 依赖于频率,则必须借助于辅助线圈来测量 C_0 。辅助线圈的心子是用损耗小、 ϵ 值小的高频绝缘材料制成,其尺寸与样品完全一样。匝数也和样品线

圈相同。于是可认为辅助线圈的固有电容与磁心样品线圈的固有电容相等。这样就可利用上述方法由式(6-63)确定辅助线圈的固有电容,亦即确定了磁心线圈的固有电容 C_0 。

除了以上对测试结果给予数字修正之外,在磁测量技术上还采用绕制小的固有电容线圈的方法来消除磁心线圈固有电容 C_0 对测量值的影响。减少线圈的匝数虽然可以减小 C_0 。但线圈匝数的减少可能引起试样磁化不均匀,因此解决的途径只可能是:采用适当的圈数和合适的绕制方法绕制测量线圈。如图 6-30(a) 所示的双线并绕法绕制的样品线圈就具有小的固有电容。双线并绕法是将一环状样品两边分别并联式地绕线,使得绕制匝数减少,导线之间的距离变大,并且两个绕组相应匝之间的电压相同,不会引起电容性电流,大大抑制了固有电容的影响。两并联绕组的磁化场方向在样品环内仍然是同向旋转,而漏磁又不会明显增加。

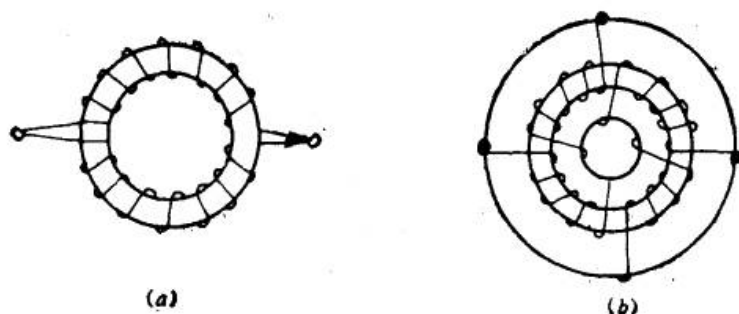


图 6-30 双线并绕法 (a) 和多分列绕法 (b)

在不同频率下测量时,为了使线圈的阻抗配合测量设备的测量范围,线圈在高频时要相应减少匝数,在低频时应多绕一些匝数。一般情况下,为了使线圈绕制方便,多采用一绕到底的均匀分布的绕法。但是为了在不同频率下对同一样品进行测量,也采用多分列绕制方法,如图 6-30(b) 所示,这种绕制法可以避免高频时由于线圈过少引起漏磁。但即使采用这种绕线方法,由于各线圈的互感增加,在高频(几十兆赫)时仍然要考虑其它方法。

实际测量的样品若是高介电常数(ϵ)的铁氧体磁性材料,电介质的影响是必须加以考虑的。因为导线匝间的电力线穿过高 ϵ 的材料会增加固有电容的数值。避免的方法是在样品外面包一层很薄的低 ϵ 绝缘层,使导线匝间电力线不穿过样品介质。达到减小固有电容的目的。

二、二次平衡法

用电桥对小电感进行测量时,电桥未知臂所显示的残余电感和残余电阻的影响已不可忽略。为了减小测量误差,需采用二次平衡法进行修正。

以麦克斯威尔电桥为例,第一次平衡(在 L_x 端子短路时)时电阻 R_2 的值和 C_2 的值分别为 R_2' 、 C_2' ;第二次平衡(在接入 L_x 时)时,电阻 R_2 和 C_2 的值为 R_2'' 、 C_2'' ,那么磁心的未知参数为:

$$L_x = R_1 R_3 (C_2'' - C_2')$$

$$R_x = R_1 R_3 \left(\frac{1}{R_2''} - \frac{1}{R_2'} \right)$$

这种方法在别的桥路中也可使用,测量电感的准确度可达 0.1%。

三、可逆电感和可逆磁导率的测量

在通信技术中,经常需要测定交、直流同时通过一个磁化绕组的扼流圈或级间变压器的电感或磁心的磁导率,这种电感和磁导率称之为可逆电感和可逆磁导率,可以应用欧文电桥和海氏电桥来测量,但通常采用海氏电桥。图 6-31 示出了应用海氏电桥的测量电路。直流电源接到指零仪的对角线中,调节电流使通过 L_x 的磁化电流达到额定值。为了使直流电流不通过交流指零仪以及能用一个直流电流表来测量电流的大小,在电桥的对角线中加接了电容器和扼流圈。由于直流电流可能通过桥臂 R_3 , 因此,该电阻必须有足够的电流容量。同时为了避免调节 R_3 而改变直流电流的数值,在此电桥中应使 R_3 的数值保持不变。而另用一个电阻臂 R_1 来调节电桥达到平衡。由于电桥中的直流电流有可能进入交流电源,故在交流电源与电桥之间又加接了两个电容器。

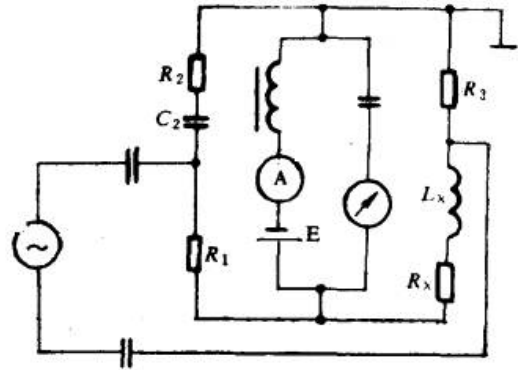


图 6-31 测量可逆磁导率的海氏电桥

海氏电桥的平衡条件为:

$$L_x = \frac{R_1 R_3 C_2}{1 + (\omega C_2 R_2)^2}$$

$$R_x = \frac{R_1 R_2 R_3 (\omega C_2)^2}{1 + (\omega C_2 R_2)^2} \quad (6-64)$$

可逆磁导率可按式(6-35)计算。

6.6 谐振法测量复数磁导率

谐振法是磁性测量技术中能进行快速测量的方法,一次能测量出复数阻抗的实部和虚部。它是根据 $L-C$ 回路的谐振特性而建立起来的。从理论上说,虽然谐振法的测量准确性不如交流电桥,但在高频范围内,由于它的测量线路比较简单,实际上反而容易获得比较可靠的结果。

另外,在高频电子工程技术中,磁性材料大都用作调谐回路的电感线圈磁心,因此用谐振法测量磁性材料的复数磁导率,比较符合实际工作情况。

由于以上原因,谐振法几乎成了高频磁性测量的唯一重要方法。最常用的谐振法是各种类型的 Q 表。

一、 Q 表原理

Q 表是一种常用的成品仪器,按频段分类,有低频 Q 表 (1kHz~300kHz)、高频 Q 表 (50kHz~50MHz)、超高频 Q 表 (30MHz~200MHz)、微波 Q 表等类型。图 6-32 是这

种仪器的原理线路。它包括振荡器、谐振回路和电子管电压表三个部分。

谐振回路用互感器同振荡器耦合。谐振回路的高频电流由高频电流表指示, R_s 为一个

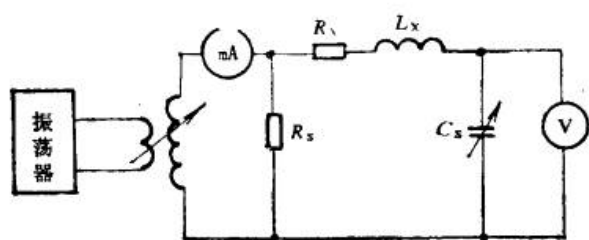


图 6-32 Q 表原理线路

个小阻值的无感电阻, 高频电流在电阻 R_s 上产生一个电压降: $V_s = I_1 R_s$, V_s 可作为供给谐振回路的基准电压。这个电压加到由 $R_x + j\omega L_x$ 和调谐电容 C_s 所组成的串联谐振回路上, 当 C_s 和 L_x 满足谐振条件时, C_s 两端的电压 V_c 达到极大值, 按照谐振回路的原理, V_c 和 V_s 之间的关系为:

$$V_c = \frac{V_s}{R_x} \left(\frac{1}{\omega C_s} \right) = \frac{\omega L_x}{R_x} V_s = Q_x V_s \quad (6-65)$$

式中, V_c 为 V_s 的 Q 倍, 若将 V_s 的大小保持不变, V_c 即正比于被测线圈的 Q 值。因此可以将电子管电压表按 Q 值刻度, 测量时可以直读 Q 值。从以上分析可以看出, Q 表所显示的 Q 值是被测线圈的视在 Q 值, 即包含了线圈分布电容在内的 Q 值。因为式(6-65)包含了几项假设: 电容 C_s 的损耗与线圈的损耗相比可以忽略; 电压表回路的损耗可以忽略; 输入电压 V_s 的内阻与磁心线圈的损耗电阻相比可以忽略。从式(6-65)可以看出, Q 表的量程可以通过减小 V_s 而扩大, 当 V_s 减小一半时, Q 的量程扩大一倍。

二、Q 表在磁测量中的应用

(一) 直接法测量线圈的电感

将被测磁心线圈接入 Q 表测试端组, 保持测试频率 f_0 不变, 旋动调谐电容 C 使回路谐振, 从电压表上读出被测线圈的视在 Q 值 Q_{cx} ; 并根据 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{cx} \cdot C}}$ 可得到被测线圈的串联等效电感的视在值为:

$$L_{cx} = \frac{2.53 \times 10^4}{f_0^2 \cdot C} \quad (6-66)$$

式中, f_0 的单位为 MHz; L_{cx} 的单位为 μH ; C 的单位为 pF。

在对 Q_{cx} 、 L_{cx} 进行修正以后, 求得磁心线圈的真实参数 Q_x 、 L_x , 然后代入式(6-35)求得样品的 μ' 值。

(二) 替代法测量线圈的电感

Q 表中的调谐电容是在一定范围内变化的, 相当于有一上限 C_1 和下限 C_2 , 因此, 在某一确定测试频率下, 被测电感的变化范围也相应有一下限 L_1 和一上限 L_2 。用直接法测量电感, 尽管能采用变换线圈匝数的办法来扩大测量频率范围, 但由于样品线圈的匝数过多或过少都是不恰当的, 所以测试频率仍受到被测线圈参数的限制。

用替代法测量磁心线圈时, 通常是用一只辅助线圈和可变标准电容组成回路, 而被测磁心线圈引入回路的效果是借改变标准电容器的电容来“替代”。当测试频率确定后, 若被测线圈的电感 $L_{cx} < L_1$, 即小电感情况下, 可用“串联替代法”; 在 $L_{cx} > L_2$, 即大电感情况下, 可用“并联替代法”。这两种方法的线路原理见图 6-33(a)、(b)。

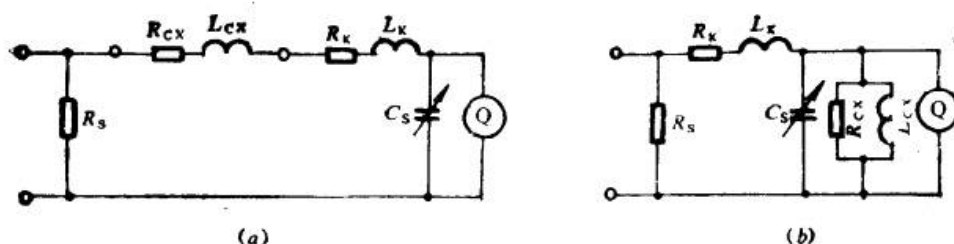


图 6-33 替代法测电感

(a) 串联替代法 (b) 并联替代法

串联替代法 在任意频率下,使用一“标准”电感 L_k , 其电感量应在操作频率下使初次发生谐振时的电容值在可变标准电容器 C 调节范围的中部。设“标准”线圈发生谐振时所需的可变电容的值为 C_{s1} , 则 C_{s1} 与“标准”电感 L_k 和谐振频率 f_0 之间的关系由式 (6-66) 可得:

$$L_k = \frac{2.53 \times 10^4}{f_0^2 \cdot C_{s1}} [\mu H]$$

被测电感与标准电感串联之后,若将可变标准电容的值减少至 C_{s2} , 回路又恢复谐振, 则有:

$$L_k + L_{cx} = \frac{2.53 \times 10^4}{f_0^2 C_{s2}} [\mu H]$$

将以上两式相减便得:

$$L_{cx} = 2.53 \times 10^4 \cdot \frac{C_{s1} - C_{s2}}{f_0^2 C_{s1} C_{s2}} [\mu H] \quad (6-67)$$

而被测线圈的 Q 值为:

$$Q_{cx} = \frac{Q_1 Q_2 (C_{s1} - C_{s2})}{C_{s1} Q_1 - C_{s2} Q_2} \quad (6-68)$$

并联替代法 首先用标准电感 L_k 与标准可变电容 C 组成谐振回路, 调节标准可变电容 C 使回路谐振, 此时得到 C_{s1} 和 Q_1 。然后又将被测电感与标准可变电容并联, 再调节 C 使回路恢复谐振, 得到 C_{s2} 和 Q_2 , 被测电感接入谐振回路的前后, 回路谐振应分别满足下面二式:

$$\frac{1}{L_k} = \frac{f_0^2 C_{s1}}{2.53 \times 10^4} \text{ 和 } \frac{1}{L_k} + \frac{1}{L_{cx}} = \frac{f_0^2 C_{s2}}{2.53 \times 10^4}$$

将后式减去前式,再取其差的倒数,便得:

$$L_{cx} = \frac{2.53 \times 10^4}{f_0^2 (C_{s2} - C_{s1})} [\mu H] \quad (6-69)$$

$$Q_{cx} = \frac{Q_1 Q_2 (C_{s1} - C_{s2})}{C_{s1} (Q_1 - Q_2)} \quad (6-70)$$

式(6-69)和(6-70)中的 L_{cx} 和 Q_{cx} , 其实是 6.3 节中讨论的并联电感 L 和并联 Q , 需要转换成串联参数才能计算。我们常常使用的(串联)磁导率, 其计算非常复杂。所以在 $L_{cx} > L_2 > L_1$ 的情况下, 为了避免复杂的运算, 往往不采用并联替代法, 而用减少样品上线圈的匝数或减小样品体积的办法来适应某一频率下的测量。

用替代法测量磁心线圈,回路里出现了两个电感元件,在推导计算公式的过程中却没有考虑到它们之间可能出现的电磁耦合。所以,在应用替代法测量时,要力求避免这种耦合。其方法是将两线圈分别加以屏蔽或使其远离,并相互垂直放置。

三、关于视在值的修正

在 6.3 节里,我们讨论了被测参数的视在值 L_{cx} 和 Q_{cx} , 这些数值里都包含了分布电容对测量结果的影响。应用 Q 表测量磁心电感时仍然要应用式(6-49)和(6-50)来修正视在值。

在电桥测量法中,用电桥确定分布电容的方法是一种间接方法。这里我们讨论应用 Q 表直接测量分布电容 C_0 的原理和方法。

从图 6-23 可以看出,由 L_x 和 $C + C_0$ 所组成的谐振回路与 L_{cx} 和 C 组成的谐振回路等效,这里的 C 是 Q 表中的标准可变电容器。电路谐振之后,谐振频率为

$$\omega^2 = \frac{1}{L_x(C + C_0)}$$

将此式代入式(6-49)和(6-51),分别得到:

$$\begin{aligned} L_x &= L_{cx} \frac{C}{C + C_0} \\ Q_x &= Q_{cx} \frac{C + C_0}{C} \end{aligned} \quad (6-71)$$

式中, C_0 是我们需要测量的分布电容;利用 Q 表测 C_0 最常用的是倍频法。

将被测线圈直接接到谐振回路中,假设由 L_x 和 $C + C_0$ 组成串联谐振回路。在频率为 ω_1 时,谐振电容为 C_1 ; 在频率为 $2\omega_1$ 时,谐振电容为 C_2 , 从而得到两个方程:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_1^2} &= L_x(C_1 + C_0) \\ \frac{1}{4\omega_1^2} &= L_x(C_2 + C_0) \end{aligned}$$

两式相除得到:

$$C_0 = \frac{C_1 - 4C_2}{3} \quad (6-72)$$

如果回路在 $2\omega_1$ 处不能谐振,可将频率改在 $\frac{1}{2}\omega_1$ 处,谐振电容为 C_3 , 则:

$$C_0 = \frac{C_3 - 4C_1}{3} \quad (6-73)$$

运用 Q 表测量电感的精确度由频率和电容的测量精确度决定,而测量频率和电容的精确度都很高,一般情况可到 10^2 。因此在 Q 值足够高的情况下,电感的测量误差也可以小于 3%。但是 Q 值的测量误差,在高 Q 时由于受到仪表附加损耗(主要来自于高频毫伏表和可调电容的有功损耗,另外还来自于高频毫安表的误差)的影响,不可能确切地给出测量误差。

另外,利用 Q 表测量磁性材料的损耗时,尽管消除了分布电容的影响,但是并没有消除绕组铜损的影响。尤其是在高 Q 情况下,这种影响可能变得很突出。样品真正的损耗是:

$$\frac{1}{Q_M} = \frac{1}{Q} - \operatorname{tg} \delta_{cn} \quad (6-74)$$

式中, Q 为仪表的读数, $\operatorname{tg} \delta_{cn}$ 为磁心线圈导线的损耗角正切。 $\operatorname{tg} \delta_{cn}$ 在 Q 表测量法中用串联等值线圈法测量。首先制作一个与磁心线圈完全相同的非磁性线圈, 设这个线圈的电感为 ΔL , 并设磁心的磁导率为 μ' 。将磁心线圈接入 Q 表, 则有:

$$\frac{1}{Q} = \frac{R_{cn} + R_M}{\omega L} = \frac{R_{cn} + R_M}{\omega \Delta L \cdot \mu'}$$

式中, R_{cn} 、 R_M 分别为磁心线圈的导线电阻和磁心的损耗电阻, L 为磁心线圈电感。将磁性线圈与非磁性线圈串联接入 Q 表, 亦有:

$$\frac{1}{Q'} = \frac{2R_{cn} + R_M}{\omega(L + \Delta L)} = \frac{2R_{cn} + R_M}{\omega \Delta L (\mu' + 1)}$$

利用以上两式可以求出:

$$\operatorname{tg} \delta_{cn} = \frac{R_{cn}}{\omega L} = \frac{(\mu' + 1)}{\mu'} \frac{1}{Q'} - \frac{1}{Q} \quad (6-75)$$

那么磁心的 Q_M 为:

$$\frac{1}{Q_M} = \frac{2}{Q} - \frac{(\mu' + 1)}{\mu'} \frac{1}{Q'} \quad (6-76)$$

四、高频磁测量的附加装置

前几节所讨论的测量方法都是用导线在环形样品上绕制测量线圈进行测试, 这种绕有线圈的样品就是我们经常提到的磁心线圈。当测试频率增高时, 由于分布电容、导线的铜损以及因减少线圈匝数而引起的漏电感都非常明显地降低了测量准确度, 以致测试频率的上限不能超过 20MHz, 因此在进行高频磁测量时必须使用一些附加装置而不能使用磁心线圈。

(一) 短路同轴腔

这是一种具有固定长度和短路端盖的同轴腔, 图 6-34 是它的示意图。环形样品套在中心导体上并紧贴短路端盖, 将中心导体和腔体接到测试仪器之后, 短路同轴腔可以认为是匝数等于 1 的线圈。

设同轴腔放样品处的电感为 L_{01} , 加了样品之后腔的电感为 L , 而 $L = \mu' L_{01}$, 故电感的增量为 $\Delta L = L - L_{01}$, 因此:

$$\mu' = \frac{\Delta L + L_{01}}{L_{01}} = 1 + \frac{\Delta L}{L_{01}} \quad (6-77)$$

同理,

$$\mu'' = \frac{\Delta R}{\omega L_{01}} \quad (6-78)$$

式中, $L_{01} = 2h \cdot \ln \frac{D}{d} \times 10^{-3} [\mu H]$; h 为样品的高, d 和 D 为内、外导体的直径。以上两式可用于电桥测量法, 此时由二次平衡法可求得 ΔL 、 ΔR 。此处我们忽略了同轴腔未放样品处的电感, 并忽略了分布电容和交流铜损, 这种忽略, 在同轴腔品质因数很高时是允许的。由 Q 表测量 ΔR 是件比较麻烦的工作, 结果也不准确, 所以我们有必要将式(6-78)中的参数转换成与 Q 表测量法有关的频率和电容的读数。

设同轴腔放样品处的电感为 L_{01} , 不放样品处的电感为 L_{02} , 那么整个空腔的电感为 $L_0 = L_{01} + L_{02}$, 空腔谐振时:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_0 C_0} = \frac{1}{(L_{01} + L_{02}) C_0}; \quad Q_1 = \frac{\omega_0 (L_{01} + L_{02})}{R_0}$$

加样品之后, 腔体电感为 $L = \mu' L_{01} + L_{02}$, 谐振时如果保持频率不变, 则有:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{(\mu' L_{01} + L_{02}) C_s}; \quad Q_2 = \frac{\omega_0 (\mu' L_{01} + L_{02})}{R_0 + R_x}$$

用一个大小与样品相同的铜环代替样品, 谐振时, 同样可以得到:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_{02} C_{cn}}; \quad Q_3 = \frac{\omega_0 L_{02}}{R_0}$$

而样品的品质因素

$$Q = \frac{\omega_0 \mu' L_{01}}{R_x}$$

利用以上三个谐振关系式, 消去 L_{01} 、 L_0 、 L_{02} 和 ω_0 可以得到:

$$\mu' = 1 + \frac{(C_0 - C_s) C_{cn}}{(C_{cn} - C_0) C_s} \quad (6-79)$$

而

$$Q = \frac{C_0}{C_{cn}} (C_{cn} - C_s) \frac{Q_1 Q_2}{Q_1 C_0 - Q C_s} \quad (6-80)$$

利用短路同轴腔进行三次测量后, 由上式可求出样品的 μ' 和 Q 值。

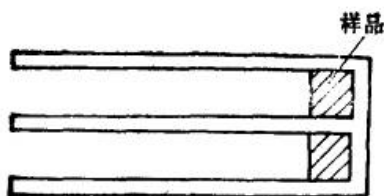


图 6-34 短路同轴腔

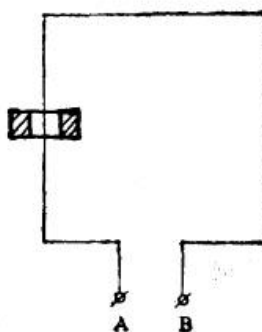


图 6-35 单匝方形线圈

(二) 单匝线圈

单匝方形线圈是用于高频测量的最简单的装置, 如图 6-35 所示。将环形样品放在方形线圈的一条边上, 将 A、B 两端接入电桥和 Q 表即可进行测量。

在实际测量中, 我们采用面积很大的方形单匝线圈, 其电感和品质因数在指定频率下是事先知道的, 环形样品处于该导线所产生的磁场之中, 磁场幅值的大小为:

$$H_m = \frac{I\sqrt{2}}{2\pi r_e}$$

式中, I 为电流的有效值; r_e 为样品的有效半径。样品在磁场作用下产生的磁感应强度为:

$$B_m = \mu_0 \mu' H_m = \frac{I\sqrt{2}}{2\pi r_e} \mu_0 \mu'$$

由样品而引起磁通量的改变为:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= (B_m - \mu_0 H_m) A_s = \frac{l\sqrt{2} A_s}{2\pi r_e} \mu_0 (\mu' - 1) \\ &= \frac{l\sqrt{2} h \cdot \ln r_2/r_1}{2\pi} \mu_0 (\mu' - 1)\end{aligned}$$

因此,从单匝线圈 A、B 两端测量的电感增量为:

$$\Delta L = \frac{\Delta\Phi}{I\sqrt{2}} = \frac{h \cdot \ln r_2/r_1}{2\pi} \mu_0 (\mu' - 1)$$

或

$$\mu' = \frac{2\pi\Delta L}{\mu_0 h \cdot \ln r_2/r_1} + 1 \quad (6-81)$$

同时也给出:

$$\operatorname{tg} \delta_F = \frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q_1} = \frac{1}{\omega L} (R_x - R_{cu}) \quad (6-82)$$

式中, Q_2 、 Q_1 为放样品和不放样品时测量的品质因数。在不同频率下,可以通过改变单匝线框的面积使其与 Q 表的电容谐振。如果将方框周长从 60 cm 改变到 2 cm,可以在 3MHz~100MHz 的频率范围内进行测量。

6.7 磁芯电感与损耗的自动测量技术

一、电流-电压法原理

电流-电压法又称为复数阻抗法或半桥法,是半自动和自动电感测试仪器所广泛采用的方法。其测量原理是基于复数欧姆定律:

$$Z_x = \frac{\dot{U}_x}{\dot{I}_x} \quad (6-83)$$

式中, Z_x 为被测磁芯线圈的阻抗, \dot{U}_x 和 \dot{I}_x 分别为被测磁芯线圈的端电压和流过线圈的电流。当 \dot{U}_x 和 \dot{I}_x 可测出或其比值可测出时, Z_x 即可求出。测试原理由图 6-36 所示。图中 R_s 为无感标准电阻, \dot{U}_s 为运算放大器 A 的输出电压。

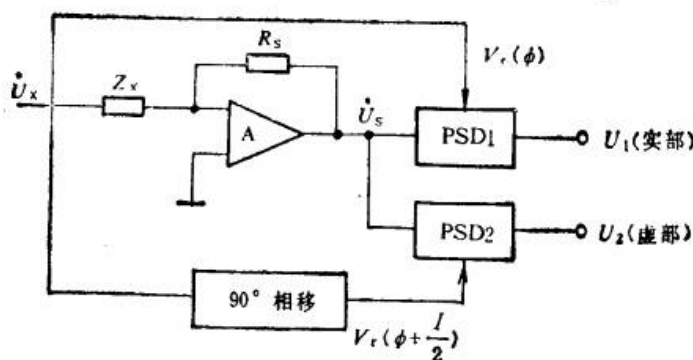


图 6-36 电流-电压法测量原理

由于运算放大器是一个高输入阻抗、高增益的放大器,故 a 点为虚地点,流过 Z_x 和 R_s 的电流近似相等,同为 \dot{I}_x 。所以 $\dot{I}_x = \dot{U}_s/R_s$, 将此式代入式(6-83)得到:

$$Z_x = \frac{\dot{U}_x}{\dot{U}_s} \cdot R_s \quad (6-84)$$

上式将对阻抗 Z_x 的测量转换为对两个矢量电压比的测量。

电压 U_s 由两个正交的固定参考相位的相敏检波器 (PSD)，分别检测出与 Z_x 实部成正比的电压 U_1 和与虚部成正比的电压 U_2 。由这两个电压可以分别计算出被测阻抗的实部和虚部。但是，在信号的传输过程中将产生相位偏移，从而产生测量误差，所以这类仪表的测量精度都在 1% 左右。

二、智能化自动测量技术

由于微型计算机在元件集中参数测试技术中的应用而出现了智能化仪表，其测量精度可达 10^{-3} 数量级，这是八十年代磁测技术的重大进展。智能化自动测量仪器充分发挥了微型计算机控制整个测量过程的优势，用独特的方法处理系统误差和随机误差。对于随机误差，采用 N 次自动测量计算平均值的方法来消除。对于系统误差，则利用计算机功能加以消除，并能把包含在集中参数中的分布参数 R_0, C_0 分离出来。我们以 YY2810LCR 数字电桥为例来说明这种技术的原理。图 6-37 示出了这种电桥的简化原理。图中可以

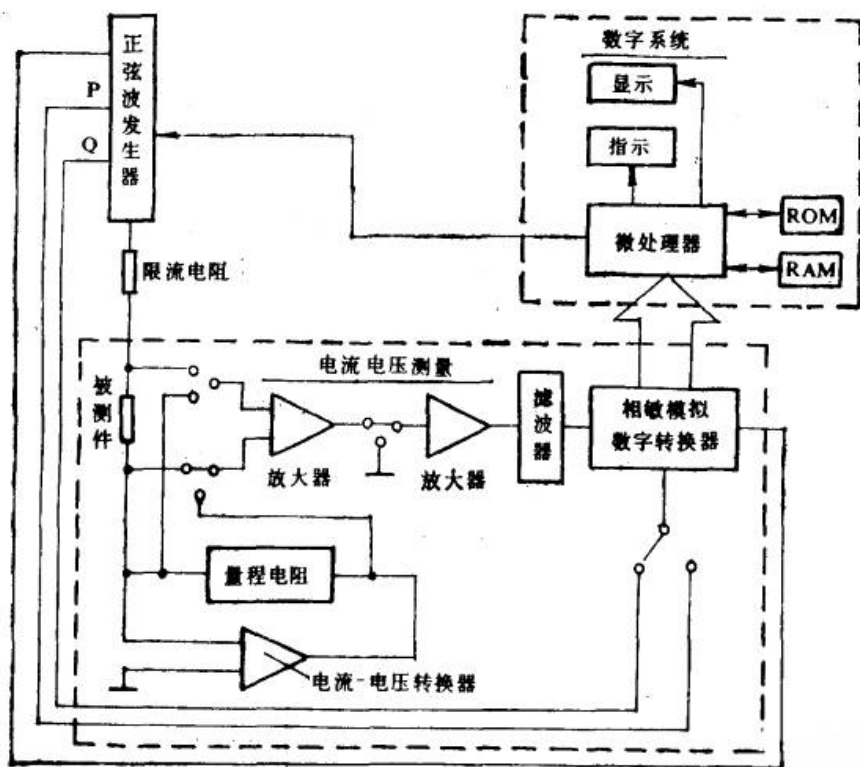


图 6-37 YY2810 LCR 数字电桥的简化方框图

分为三个主系统：(1)正弦波发生器的输出信号通过限流电阻与被测磁芯线圈和电流-电压转换器形成励磁回路。(2)电压、电流测量回路。用一个简单的差分放大器来测量电压，用电流-电压转换器测量电流。在差分放大器之后，电压信号经过增益放大器和带通滤波器施加到相敏模拟数字转换器 (PSADC) 上。PSADC 含一个相敏检波器 (PSD) 和一个双斜积分型 A/D 转换器。PSD 的参考信号是与测试信号频率相同的同相方波或正交方波。对电压(或电流)进行两次测量：两次的参考信号分别为同相方波和正交方波。设电压、电流的同相分量和正交分量分别为 V_P, V_g, I_P, I_g ，于是得到：

串联等效电阻:

$$R_s = V_p I_p + V_g I_g / I_p^2 + I_g^2 \quad (6-85)$$

并联等效电阻:

$$R_p = V_p^2 + V_g^2 / V_p I_p + V_g I_g \quad (6-86)$$

串联等效电抗:

$$X_s = V_g I_p - V_p I_g / I_p^2 + I_g^2 \quad (6-87)$$

并联等效电抗:

$$X_p = V_p^2 + V_g^2 / V_g I_p - V_p I_g \quad (6-88)$$

$$Q = V_g I_p - V_p I_g / V_p I_p \times V_g I_g$$

在第(3)个主系统——数字系统和软件系统中进行这些简单的算术运算之后,就可以得到被测参数了。数字系统包括 Z80 微处理器 ROM、RAM、数字显示器等,电桥的操作软件存在于 ROM 中。

这类仪器有许多优点,但是作为软磁铁氧体磁性材料的起始磁导率的测量,其致命的缺点是,加在磁芯线圈的电压过高且不能调节,例如 YY2810 为 300mV,在这个电平下所得到的磁导率早已不是起始磁导率 μ_i 。但是对于电感器和变压器的测试来说,它的确是个很好的仪表。

在磁性测量技术中,我们都希望采用测量电平可变的多频自动测量仪表。

6.8 高频低磁通密度下磁损耗的测量

一、阻尼振荡法测量磁芯的总损耗

阻尼振荡法是国家标准 GB-9632 中推荐的损耗测量的定标方法。此法可以测量额定直流磁通密度下铁氧体磁性材料的高频磁损耗,从原理上说,比电桥法更为合理。

如果将被测电感 L_x 与一个高品质电容相并联,使两者并联的谐振频率等于测量频率,如果给这个电路通入一个非常窄的电流脉冲,这个电路就会产生阻尼衰减振荡。假定电容和电感都是固定不变的,那么磁心的损耗越大振荡电压的衰减就越快,阻尼振荡的结果在标准示波器上观察。如在已知的时间间隔的始末测量振荡电压的幅度,就可以推导出磁心的品质因数,图 6-38 给出了这种方法的测试电路。

耦合电容 C_A 同谐振电容 C 相比较必须很小,此时振荡器 G 的阻抗对谐振电路的影响才可忽略不计。探头的阻抗必须很高,否则必须事先知道其数值,并作如下校正:当开关 S_2 断开,而示波器工作于非存储状态时,接通开关 S_1 ,利用观察

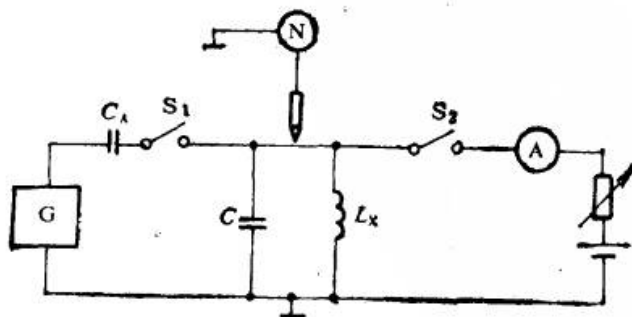


图 6-38 阻尼振荡法的测量电路

示波器上最大幅度指示,把振荡器的频率调至谐振频率。电感两端的电压应该近似地符合所规定的磁通密度。假如谐振频率不够接近测量频率,则应当调节电容 C 。频率调准

之后,断开 S_{10} 。

随后接通开关 S_2 ,把直流电流调至与规定磁通密度相应的值,并使示波器工作在存储状态。当接通开关 S_1 时, L_x-C 回路发生的阻尼振荡就被记录在示波器上。图 6-39 和图 6-40 是高 Q 和低 Q 试样所对应的两种图象。

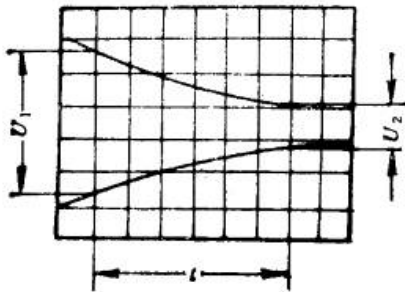


图 6-39 高 Q 阻尼振荡

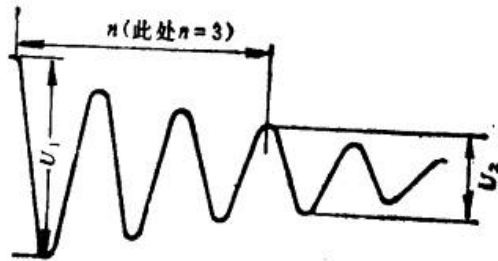


图 6-40 低 Q 阻尼振荡

对于高品质因素试样,测量电压 U_1 和 U_2 以及时间间隔 t , 则

$$Q = \frac{\omega t}{2 \ln \frac{U_1}{U_2}} \quad (6-89)$$

式中, ω 是回路的振荡频率。

对于低品质因素试样,测量电压 U_1 和 U_2 以及周期数 n , 则

$$Q = \frac{\pi n}{\ln \frac{U_1}{U_2}} \quad (6-90)$$

用这种方法可以得到很高的测量准确度。只要探头的阻抗足够高而电容的损耗比较小,精确度可以高于 2%。这是目前用来测量高 Q 的最准确的方法。

二、磁芯磁滞损耗的测量

磁芯的磁滞损耗可以用磁滞损耗角正切 $\lg \delta_b$ 、磁滞比损耗, $\lg \delta_b / \mu_i$ 以及磁滞常数 η_i 来表示, η_i 的定义式见式(1-31)。

在低磁通密度下,磁芯的比磁损耗满足以下方程式(列格公式):

$$\frac{\lg \delta}{\mu_i} = \frac{1}{2\pi} (ef + aB_m + c) \quad (6-91)$$

式中, f 为测试频率, e, a, c 分别代表涡流、磁滞和剩余损耗系数。所以式(6-91)中右边的第一项代表涡流损耗,第二项代表磁滞损耗,第三项代表剩余损耗。

如果在额定频率和不同的磁通密度下测量磁芯的比损耗,作出 $\lg \delta / \mu_i \sim B_m$ 直线,则直线的斜率即为系数 a (图 6-41)。由于磁通密度 B_m 正比于被测磁芯线圈的峰值端电压 \hat{U} , 所以只要我们在两个磁通密度下测量磁芯的比损耗,则磁滞比损耗就正比于被测损耗之差 $\Delta \lg \delta$ 与外加峰值端电压之差 $\Delta \hat{U}$ 的比,从而可以计算出磁滞比损耗,即

$$\frac{\lg \delta_b}{\mu_i} = \frac{\Delta \lg \delta \cdot \hat{U}}{\mu_i \cdot \Delta \hat{U}} = \frac{\hat{U} \Delta R_s}{\mu_i \omega L_s \Delta \hat{U}} \quad (6-92)$$

只要能以所要求的精度测出磁芯损耗随磁通密度的变化,任何合适的测量装置都可以使用。但是式(6-92)中的 \hat{U} 应是在较高磁通密度下的峰值电压的测量值,这个磁通密度不应超过 5mT。 L_s 应是在较低的那个磁通密度下的磁芯线圈的串联电感。 ΔR_s 是串联电阻之差的测量值。

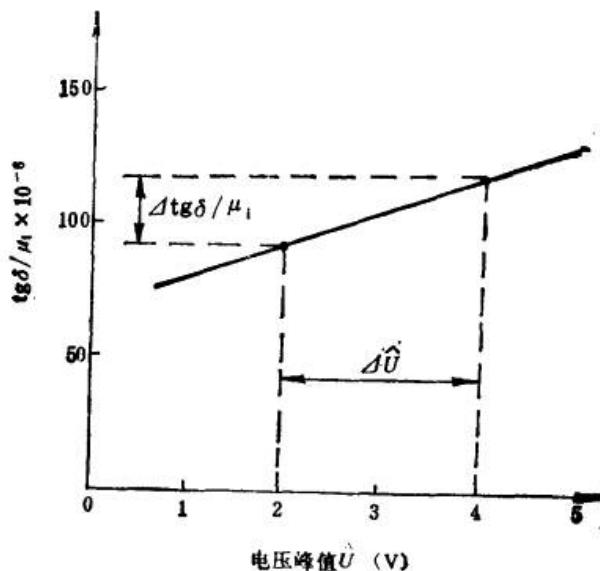


图 6-41 测量磁滞比损耗的示意图

6.9 同轴谐振腔在磁测量中的应用

这种测量系统设计理论的依据是传输线原理,采用这种系统可以在高频情况下准确地测量磁导率。这种系统有两种不同的类型:一是具有集中电容、而长度 $l \ll \lambda/4$ 的同轴谐振腔;另一种是长度 $l = \lambda/4$ 的同轴谐振腔。前者是一个带有集中电容的传输线谐振系统,可以在 10 或 20MHz 直到 300MHz 范围内运用;后者是采用长度 $l = \lambda/4$ 的同轴线段作为谐振腔,其使用频率可以到 300MHz 以上。

一、具有集中电容、 $l \ll \lambda/4$ 的同轴谐振腔

如图 6-42(a) 所示,样品放在图中所示的位置,此处的磁场以内导体为轴旋转,正好磁化环试样,但此处的磁场并不是最大而电场也不为零,这种安排完全是为了满足腔体的微扰条件,样品的体积大小应远小于相应的 $\lambda/4$ 腔体的体积。来自信号源的功率由磁耦合线圈输入到腔体,检波晶体管 D 安装在内、外导体的电容片之间,谐振时,腔内形成驻波,晶体所在处的电场最大,因此与晶体连接的电流计就有最大偏转,利用这一现象可以判断系统是否处于谐振状态。

假定电容 C 和长度 l 已经固定,而样品的引入仅对腔体的谐振频率 ω 和 Q 值产生影响。我们将样品放入腔体之后,将样品的电感与腔体等效成并联谐振电路,谐振时有:

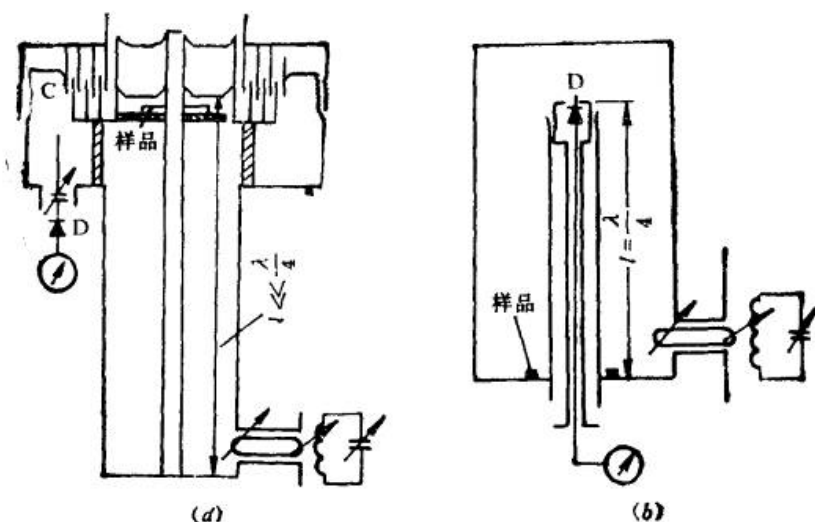


图 6-42 集中电容

(a) $l \ll \lambda/4$ 同轴谐振腔 (b) $l = \lambda/4$ 同轴谐振腔

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

由于样品对腔体是一个微小的扰动, 谐振频率将发生变化, 由谐振条件可以得到:

$$\frac{2 \delta \omega}{\omega} = -\frac{\delta L}{L} \quad (6-93)$$

式中, $\delta \omega$ 为频率的变化, δL 为电感的变化, 而 ω 和 L 为谐振腔的谐振频率和电感。

若空腔的谐振频率为 ω_0 , 等效电感为 L_0 , 且 $L_0 = L_{01} + L_{02}$, L_{01} 为空腔放样品处的等效电感, L_{02} 为其余部分的电感。将样品放入腔体之后, L_0 将变成 L , 且 $L = \mu' L_{01} + L_{02}$ 。则电感的增量 δL_F 为:

$$\delta L_F = L - L_0 = (\mu' - 1)L_{01}$$

所以加样品之后, 谐振频率的变化为:

$$\delta \omega_F = -\frac{\omega_0}{2L_0} (\mu' - 1)L_{01} \quad (6-94)$$

用一个与样品尺寸完全相同的铜环代替样品, 由于铜的集肤效应, 铜环的磁导率等于零, 与空腔相比, 电感的变化为:

$$\delta L_{Cu} = L - L_0 = -L_{01}$$

此时谐振频率的变化为:

$$\delta \omega_{Cu} = \frac{\omega_0}{2L_0} L_{01} \quad (6-95)$$

将式(6-94)除以式(6-95)得到:

$$\mu' - 1 = -\frac{\delta \omega_F}{\delta \omega_{Cu}} = -\frac{\delta f_F}{\delta f_{Cu}} \quad (6-96)$$

样品的 $\mu'' = \mu' \tan \delta_F$, 而 $\tan \delta_F$ 可以作这样的考虑: 设样品腔的总电感为 $L = L_0 + \delta L_F$, 且样品的等效电感 $L_F = \mu' L_{01}$; 样品腔的总损耗电阻 $R = R_0 + R_F$, R_0 为空腔的损耗电阻, R_F 为样品的损耗电阻。因此可以得到

$$\frac{R}{\omega L} = \frac{R_0 + R_F}{\omega \left(L_0 + \frac{\mu' - 1}{\mu'} L_F \right)}$$

解上式,得样品的损耗角正切为

$$\operatorname{tg} \delta_F = \frac{R_F}{\omega L_F} = \frac{\mu' - 1}{\mu'} \frac{R}{\omega L} - \frac{L_0}{L_F} \left(\frac{R}{\omega L} - \frac{R_0}{\omega L_0} \right)$$

式中, $R/\omega L$ 和 $R_0/\omega L_0$ 分别为样品腔和空腔的损耗角正切,根据 Q 值的定义,它们显然分别等于 $\Delta f_F/f_F$ 和 $\Delta f_0/f_0$, f_F 和 f_0 分别为样品腔和空腔的谐振频率,而 Δf_F 和 Δf_0 为两种腔共振时的半功率点的频率差。假定 $f_0 = f_F$, 并利用式(6-93)可得

$$\operatorname{tg} \delta_F = \frac{\mu' - 1}{\mu'} \left(\frac{\Delta f_F}{f_F} + \frac{\Delta f_F - \Delta f_0}{2 \delta f_F} \right) = \frac{\mu' - 1}{\mu'} \left(\frac{\Delta f_F - \Delta f_0}{2 \delta f_F} \right) \quad (6-97)$$

空腔品质因素较高时,上式中的 $\Delta f_F/f_F$ 可以忽略,因此,式(6-97)是一个近似公式。

从式(6-96)和式(6-97)看出: μ' 和 $\operatorname{tg} \delta_F$ 的测量归结为对空腔、样品腔以及用铜环取代样品后的假样品腔的谐振频率和半功率点频率的测量,一般地说,用精密波长表测量频率的误差不会超过 $\pm 1\%$, 所以这种方法具有较高的准确度,其测量方法,基本上与第七章将要讨论的量 Q 法测复数介电常数的方法类似。

二、 $l = \lambda/4$ 的同轴谐振腔

应用 $\lambda/4$ 腔测量磁性参数的技术也象集中电容谐振腔那样,可以从测量腔的频率和 Q 值入手,并应用微扰原理来计算 μ' 和 $\operatorname{tg} \delta_F$ 。这种腔的长度应该满足在相应频率下真空波长 λ_0 的 $1/4$ 这个条件。在图 6-42(b) 中,样品放在腔的底部,根据微扰原理,样品的高度应该足够小。高频信号经过电磁耦合输入到腔体,检波器 D 用一探针置于电场内,探针感应电压经过晶体检波后由电流计指示,当电流最大时,表示腔处于谐振状态,可以通过改变输入信号的频率或改变内导体的长度来调谐。在采用改变信号源频率来调谐时,仍然可以应用式(6-96)和(6-97)计算 μ' 和 $\operatorname{tg} \delta_F$ 。如果固定频率用改变内导体长度 l 来调谐时,也可推导出测量表达式。

谐振时 $l = \lambda/4$, 而 $\lambda = c/\omega$ (c 为光速), 所以 $l = c/4\omega$, 那么

$$\delta l = -\frac{1}{4} c \cdot \frac{\delta \omega}{\omega^2} = -\frac{l}{\omega} \delta \omega \quad (6-98)$$

将样品放入腔之后,谐振频率降低而腔失谐,若缩短内导体尺寸,使腔恢复谐振,其长度的变化量为:

$$\delta l_F = -\frac{l_0}{\omega_0} \delta \omega_F \quad (6-99)$$

放入铜环之后,必须增加内导体尺寸,腔才恢复谐振,其长度的变化量为:

$$\delta l_{Cu} = -\frac{l_0}{\omega_0} \cdot \delta \omega_{Cu} \quad (6-100)$$

以上两式相除得到:

$$\frac{\delta l_F}{\delta l_{Cu}} = \frac{\delta \omega_F}{\delta \omega_{Cu}} \quad (6-101)$$

以式(6-101)代入式(6-96)得到:

$$\mu' - 1 = -\frac{\delta l_F}{\delta l_{cu}} \quad (6-102)$$

当频率固定时,调节内导体的长度也可求得腔的品质因素 Q_0, Q ; 所以我们可以得到等效关系:

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta \omega_0} = \frac{f_0}{\Delta f_0} = \frac{l_0}{\Delta l_0}; \quad Q = \frac{\omega_F}{\Delta \omega_F} = \frac{f_F}{\Delta f_F} = \frac{l_F}{\Delta l_F} \quad (6-103)$$

将式(6-99)代入式(6-97)并考虑到式(6-103),得到

$$\mu'' = (\mu' - 1) \left[\frac{\Delta l_F - \Delta l_0 \left(1 + \frac{\delta l_F}{l_0} \right)^2}{2\delta l_F} \right]$$

以上各式中的 l 可以从内导体的刻度尺上读出。

以上两种谐振腔法,都要求样品的内、外径之差很小,这是由同轴腔内 TEM 波型磁场的特点所决定的。从对样品尺寸的要求来讲,同轴腔法与绕线法倒是一致的。

第七章 微波频率下旋磁材料物理量的测量

旋磁材料在微波频率下所表现出的物理特性,是以在稳恒磁场和其它任意方向的交变磁场的同时作用下,其磁导率具有张量的性质为基础的旋磁特性。因此,旋磁材料的磁特性就有着不同于其它磁性材料的特征参数。张量磁导率(或磁化率)包括频散(实数)和吸收(虚数)部分,故在饱和磁化情况下,应该测量对角分量 μ' 、 μ'' 和非对角分量 K' 、 K'' 。但在铁磁共振实验中,只须测定 μ'' 与恒磁场 H 的关系。本章的内容仅仅限于与铁磁共振有关的磁特性的测量原理和方法的研究,关于张量磁导率的测量可参阅有关文献。

在共振区内,铁磁共振弛豫损耗的作用用共振线宽 ΔH 来表示,亦称一致共振线宽,共振场的大小以及有效朗德因子 g 也是重要的物理参数。许多微波旋磁器件是在共振区之外工作的,因此对共振区外旋磁特性的测量也很有实际意义,近年发展起来的有效线宽的概念,实际上就是与共振区外张量磁导率相关的参量。在高功率微波场作用下,不但会激发波数 $k = 0$ 的一致共振,而且还会激发 $k > 0$ 的自旋波,相应于 $k > 0$ 的自旋波弛豫损耗用自旋波线宽 ΔH_k 表示。

除以上与共振有关的参量之外,微波频率下旋磁材料的品质还要由介电损耗来衡量。所以复数介电常数 ϵ_r 的测量技术也是我们研究的重点内容。

所有这些量的测量,目前都有标准方法可循,所以我们的讨论内容仅限于这些标准方法的原理,而不涉及非标准方法。

7.1 谐振腔的微扰理论

微波频段的磁性测量主要采用谐振腔法。在大多数情况下又是应用谐振腔的微扰近似理论。测量时,将一已知退磁因子、体积比谐振腔体积小得多的样品放在腔内某一位置。只要样品的体积很小,与腔的作用又适合“微扰”条件,就可通过测量腔内放置样品前、后的谐振频率和品质因素的变化,确定待测的磁参数。

所谓微扰法,就是将各向同性的电动力学系统看作是未扰动状态、或扰动前的状态,并认为这个系统中电磁场的分布、电磁场振荡角频率以及介电常数 ϵ_0 、磁导率 μ_0 等参数都是已知的。当在上述的系统中放入旋磁介质时,原来的系统就要发生变化,即系统被扰动。我们把这时的电动力学系统看作是扰动状态。

假定放入系统中的旋磁样品的体积 V_s 与系统的体积 V_0 相比很小($V_s/V_0 \ll 1$),系统中除样品所在处的 ϵ 、 μ 、 E 、 H 跟未扰动前不同之外,其他地方的 ϵ 、 μ 、 E 、 H 都跟扰动前相差很小。若系统是一谐振腔,则未扰动的谐振频率 ω_0 与扰动后的谐振频率 ω 也相差不大。这就是我们以后要经常提到的微扰条件。

有某一充满各向同性物质(μ_0 、 ϵ_0)的电动力学系统,其性质由角频率 ω_0 、电场 E_0 及磁场 H_0 等参数所描述,并设系统内不存在自由体电荷和自由体电流,扰动前的麦克斯威尔方程组中的两个旋度方程为:

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = -\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} \quad (7-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 = \frac{\partial \mathbf{D}_0}{\partial t} \quad (7-2)$$

并设场为

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{i\omega_0 t}$$

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r})e^{i\omega_0 t}$$

因此,式(7-1)和(7-2)又可写成:

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 + j\omega_0 \mu_0 \mathbf{H}_0 = 0 \quad (7-3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 - j\omega_0 \epsilon_0 \mathbf{E}_0 = 0 \quad (7-4)$$

设在系统中部分体积内充满了旋磁介质,这时系统处于扰动状态,其性质由 ω 、 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 等参数所描述。这时,麦克斯威尔方程组中的两个旋度方程为:

$$\nabla \times \mathbf{E} + j\omega \mu_0 \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (7-5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - j\omega \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} = 0 \quad (7-6)$$

为了导出微扰理论的一般关系式,我们写出未扰动状态麦克斯威尔方程的共轭方程:

$$\nabla \times \mathbf{E}_0^* - j\omega_0^* \mu_0 \mathbf{H}_0^* = 0 \quad (7-7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_0^* + j\omega_0^* \epsilon_0 \mathbf{E}_0^* = 0 \quad (7-8)$$

事实上,谐振频率 ω_0 也是一个复数, $\omega_0 = \omega_0' + j\omega_0''$, 其实数部分表示电磁波的实际振动频率,虚数部分则表示振幅随时间作指数衰减的物理量。所以在这里也应引入 ω_0 的共轭复数 ω_0^* 。

将式(7-5)、(7-6)、(7-7)、(7-8)对应标乘以 \mathbf{H}_0^* 、 $-\mathbf{E}_0^*$ 、 \mathbf{H} 、 $-\mathbf{E}$,然后相加得到:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{H}_0^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}_0^*) + (\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}_0^* - \mathbf{E}_0^* \cdot \nabla \times \mathbf{H}) \\ & = -j[\omega \mathbf{H}_0^* \cdot \mu_0 \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H} - \omega_0^* \mathbf{H}_0^* \cdot \mu_0 \mathbf{H} + \omega \mathbf{E}_0^* \cdot \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} - \omega_0^* \mathbf{E}_0^* \cdot \epsilon_0 \mathbf{E}] \end{aligned} \quad (7-9)$$

考虑到矢量运算公式 $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_0^*) = \mathbf{H}_0^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}_0^*$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}_0^* - \mathbf{E}_0^* \cdot \nabla \times \mathbf{H}$$

我们得到:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_0^* + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}) \\ & = -j[\omega \mathbf{H}_0^* \cdot \mu_0 \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H} - \omega_0^* \mathbf{H}_0^* \cdot \mu_0 \mathbf{H} + \omega \mathbf{E}_0^* \cdot \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} - \omega_0^* \mathbf{E}_0^* \cdot \epsilon_0 \mathbf{E}] \end{aligned} \quad (7-10)$$

将式 7-10 对整个谐振腔积分,并利用高斯-奥斯特罗拉斯基定理得到:

$$\int_{V_C} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_0^* + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}) dV = \oint_{S_C} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_0^* + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}_0 dS$$

式中, \mathbf{n}_0 为单位矢量,它垂直于谐振腔表面并指向腔外。经积分后,(7-10)式变成:

$$\begin{aligned} & \oint_{S_C} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_0^* + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}_0 dS + j \int_{V_C} [\omega \mathbf{H}_0^* \cdot \mu_0 \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H} - \omega_0^* \mathbf{H}_0^* \cdot \mu_0 \mathbf{H} \\ & + \omega \mathbf{E}_0^* \cdot \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} - \omega_0^* \mathbf{E}_0^* \cdot \epsilon_0 \mathbf{E}] dV = 0 \end{aligned}$$

在谐振腔壁上的边界条件应是

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}_0 = 0 \text{ 和 } \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{n}_0 = 0$$

故上式中第一项的面积分为 0,于是该式变成如下形式: